数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 40-47



# Higson 境界上の同相変換の不動点集合

東京大学 大学院数理科学研究科　嶺 幸太郎
Kotaro Mine
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

前稿にて山下温氏 (千葉工大) は, Higson 境界上の不動点の存在条件について論じた. 本稿では, この存在条件を考えた動機および背景について復習し, 更にその応用を述べる.

## 1. 序

距離空間を粗っぽく分類する擬等長同値という概念がある. 大雑把に述べれば, 空間の広がり方が似ているかどうかを考えており, Higson 境界とよばれる無限遠境界の位相的性質はこうした情報の一部を反映している. 実際, 距離空間の間の擬等長同型は Higson 境界の同相写像を誘導し, 特に, 距離空間への擬等長変換による作用は Higson 境界上の作用を誘導する. Higson 境界上の力学系を調べるにあたって最も基本的な問題となる, 擬等長同型が誘導する境界上の同相変換の不動点全体はどんな集合になっているかについて本稿で論じたい.

まず簡単な例として, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の鏡映変換を考えてみよう.

**命題 1.1.** $\mathbb{R}^n$ 上の鏡映変換 $f$ が誘導する Higson 境界上の同相変換の不動点集合は, $f$ の不動点集合の Higson 境界に一致する.

上の命題は直ちに得られると思われるかもしれない. しかしながら, Higson コンパクト化は第 1 可算公理を満たさないことから測地線が定める境界とは事情が異なっており, 上の命題は自明なものではない. 本稿では, より一般的な立場からこの問題について論じたうえで, 命題 1.1 を示す (命題 4.4).

## 2. 擬等長写像と Higson コンパクト化

等長写像に全射性を仮定する場合とそうでない流儀があったように, 擬等長写像の定義にも二つの流儀がある. 本稿ではこれらを次のように分けて定める.

**定義 2.1.** 距離空間の間の写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ が**擬等長埋め込み**であるとは, 次の条件を満たす実数 $A>0$ および $B\geq 0$ の存在が言えることである:

$$\forall\, x,y\in X,\quad \frac{1}{A}d_X(x,y)-B\leq d_Y(f(x),f(y))\leq Ad_X(x,y)+B.$$

**定義 2.2.** $B_{d_Y}(f(X),D)=Y$ を満たす $D\geq 0$ の存在が言えるとき, 擬等長埋め込み $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ を**擬等長同型 (quasi-isometry)** という. ここで, $B_{d_Y}(f(X),D)$ は $f(X)$ の $D$-開近傍を表す.

擬等長埋め込みに連続性は仮定しない. 擬等長埋め込みにおける条件が $A=1$, $B=0$ について成立するとき, それは等長な埋め込みとなる. 二つの距離空間の間に擬等長同型が存在するとき, それらは**擬等長同型** (**quasi-isometric**) であるという. これは同値関係となる.

**例 2.3.** コンパクト空間を定義域とする連続写像は擬等長埋め込みである.

**例 2.4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ を $f(x)=[x]$ と定めれば擬等長同型である. ただし $[x]$ は $x$ を越えない最大の整数とする.

**例 2.5.** 有限生成群を, 生成元から定まる語長距離によって離散距離空間と見なすと, 生成元の取り方によらずに, それらの間の恒等写像は擬等長同型となる.

次に Higson 境界の定義および構成について述べる. Higson 境界は, 任意の距離空間あるいは更に一般化された粗空間 (coarse 空間) に対して定義できるものである (cf. [8]). しかしながら本稿では議論の深追いを避けるため, 固有距離空間に限って話をする. **固有距離空間**とは有界閉集合であることとコンパクト集合であることが同値になるような距離空間のことである. 以下, 距離空間はすべて固有距離空間であるとする.

**定義 2.6. Higson 関数**とは, 次の条件 (**Higson 条件**) を満たす有界関数のことである:

$$\forall M>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists K\subset X:\text{compact}\ \text{ s.t. }\ x\in X\setminus K\implies \operatorname{diam} f(B_{d_X}(x,M))<\varepsilon.$$

ここで diam は直径を表す. また, Higson 条件における "$\forall\varepsilon>0$" 以降の部分を標語的に

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{diam} f(B_{d_X}(x,M))=0$$

と書く.

擬等長写像と Higson 関数の間には次のような関係がある:

**事実 2.7.** $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ を擬等長埋め込み, $g:Y\to\mathbb{R}$ を Higson 関数とすれば, $g\circ f:X\to\mathbb{R}$ も Higson 関数である.

Higson コンパクト化を定めよう. $X$ の二つのコンパクト化 $\gamma X$ および $\delta X$ の間の大小関係は, $\gamma X$ の境界 $\gamma X\setminus X$ のある部分を潰すことで得られる $\gamma X$ の商空間と $\delta X$ が一致するとき, $\gamma X$ のほうが $\delta X$ より大きいと定める.

**定義 2.8.** 任意の連続な Higson 関数が境界に連続な拡張を持つような $X$ のハウスドルフ・コンパクト化の中で最小のものを $X$ の **Higson コンパクト化**と呼び $hX$ と書く.

次のようにして, Higson コンパクト化を実際に構成することができる. $X$ 上の連続な Higson 関数全体を $C_h(X)$ とし, $\mathbb{R}^{C_h(X)}$ に通常のチコノフ積位相を入れる. このとき, 写像 $e:X\to\mathbb{R}^{C_h(X)}$ を $x\mapsto\big(g(x)\big)_{g\in C_h(X)}$ と定めれば, これは位相的な埋め込みとなる. チコノフの定理により $\prod_{g\in C_h(X)}[-\|g\|,\|g\|]$ はコンパクト空間であり, これは $e$ の像を含む. したがって $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^{C_h(X)}}\,e(X)$ は $X$ のコンパクト化と見なすことができる. これが求める Higson コンパクト化である.

以上のような構成から本稿における証明では, しばしば $X$ と $e(X)$ を同一視し, 次の包含関係があると考える:

$$X \subset hX \subset \mathbb{R}^{C_h(X)}.$$

すなわち各 $x \in X$ について $x = \big(g(x)\big)_{g \in C_h(X)}$ と考え, 各 $g \in C_h(X)$ について射影 $\mathrm{proj}_g|_{e(X)} : e(X) \to \mathbb{R}$ と $g : X \to \mathbb{R}$ を同一視して扱う.

**定義 2.9.** Higson コンパクト化の境界 $\nu X := hX \setminus X$ を **Higson 境界**と呼ぶ.

$X$ は局所コンパクト空間ゆえ, 自身のコンパクト化において $X$ は開集合となる. ゆえに $\nu X$ はコンパクト空間である. 次の事実により, Higson 境界のトポロジーは空間の擬等長不変量となる.

**事実 2.10.** 擬等長埋め込み $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ は連続単射（つまり位相的埋め込み）$\nu f : \nu X \to \nu Y$ を誘導し, とくに $f$ が擬等長同型ならば $\nu f$ は同相写像となる.

$\nu f$ の構成法について少しだけ述べておく. 本来, $f$ に連続性は仮定しないが, $f$ が連続であるとして話を進めよう. いま, $f(x)$ と $\big(g'(f(x))\big)_{g' \in C_h(Y)}$ を同一視していた. 事実2.7により $g' \circ f \in C_h(X)$ であるから (ここで $f$ の連続性を用いた), $g'(f(x)) = \mathrm{proj}_{g' \circ f}(x)$ である. ゆえに, 対応 $x \mapsto f(x)$ は $x \mapsto \big(\mathrm{proj}_{g' \circ f}(x)\big)_{g' \in C_h(Y)}$ と書ける. そこで $\nu X$ の元 $z$ についても $z \mapsto \nu f(z) := \big(\mathrm{proj}_{g' \circ f}(z)\big)_{g' \in C_h(Y)}$ と定めればよい. 定め方から明らかに $f \cup \nu f : hX \to \mathbb{R}^{C_h(Y)}$ は連続であり, この像が $hY$ に含まれることも直ちに分かる. また $f$ の擬等長性より[1] $\nu f(\nu X) \subset \nu Y$ とならねばならない.

有限生成群のような離散空間を考えている範囲では, いかなる写像も連続となるゆえ上の議論で全て事が済んでいる. 一般の固有距離空間については, 境界がもとの空間と一致するような離散部分集合を取るなどして, $f$ の制限としての連続写像があると考える. これをうまく用いることで, 同様の対応付けが与えられそうなことは想像に難くないと思われる. これ以上の細部の議論は別の機会に譲るとして, $f$ が連続でない場合についても次の意味で $\nu f$ は連続となることを押さえておこう (cf. [6]).

**事実 2.11.** $hf = f \cup \nu f : hX \to hY$ は $\nu X$ の各点で連続である.

閉部分空間の境界との間には次の関係がある (cf. [5]).

**事実 2.12** (Dranishnikov-Keesling-Uspenskij [3]). 閉集合 $A \subset X$ について $\nu A = \mathrm{cl}_{hX} A \setminus A$.

**事実 2.13.** 擬等長埋め込み $f : X \to Y$ および閉集合 $A \subset X$ について $\nu(f|_A) = \nu f|_{\nu A}$.

**事実 2.14.** 閉集合 $A \subset X$ に対して, 恒等的な埋め込み $A \hookrightarrow X$ が擬等長同型ならば $\nu A = \nu X$.

---

[1] より正確には $f$ の固有性による. コンパクト集合の逆像がコンパクトになる連続写像を固有写像というのであった.

## 3. 不動点の存在条件について

固有距離空間 $X$ から $X$ 自身への擬等長埋め込み $f: X \to X$ を**擬等長変換**と言う. 我々の目的は, $\nu f$ の不動点を考察することにある. しかし, そもそも不動点が存在するかどうかよく分かっていなければ話は始まらない. そこで, 不動点の存在条件について本節で掘り下げよう.

仮に $X$ を測地空間としよう. 無限遠の各点が測地線の極限として現れると想像するならば, ややお粗末ではあるが, 次のように考えてみたくなるのではないか.

**予想 3.1.** $\nu f$ は不動点を持たない $\Longleftrightarrow$ $X$ の各測地線 $\gamma$ に対して $f(\gamma)$ と $\gamma$ は平行でない.

先程お粗末と述べたのは, ここで測地線の擬等長像どうしが平行であることの定義が必要になるからである. さて, 肝心の定義は読者に考えてもらうとして, 例えば $f$ が等長変換の場合は通常の意味での平行が定義されており[2], 加えて $X$ が Gromov 双曲空間[3]であれば上の予想が成立することは分かっている (命題 3.5).

さて, 我々は一般の固有距離空間を考えていた. この立場において, 上の予想を次に置き換えて考えるのは自然な発想だと思われる.

**予想 3.2.** 任意の固有距離空間 $X$ および任意の擬等長変換 $f: X \to X$ について, 次の**条件※**は成立するか?

$$\text{条件※:} \quad \nu f \text{ は不動点を持たない} \iff \lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty.$$

もちろん "$\lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty$" は次の同値な二つの条件を標語的に書いたものである:

(1) $\forall M > 0,\ \exists K \subset X$ : 有界集合 s.t. $x \in X \setminus K \implies d(x, f(x)) \geq M$,

(2) $\forall B \subset X$ : 非有界集合に対して, $\sup\{\, d(b, f(b)) \mid b \in B \,\} = \infty$.

残念ながら予想 3.2 は否定される. 反例は山下氏の稿で述べられた通りであり, 漸近次元の有限性の仮定のもとで条件※の是非を検討すべきなのであった. また, 条件※の矢印のうち $\Longrightarrow$ は何の仮定もなしに成立し, 逆が非自明な問題なのであった. これについて復習しておこう (命題 3.4).

**補題 3.3.** $f: X \to X$ を擬等長変換とする. 境界上の点 $z \in \nu X$ に収束する $X$ 上の有向点列 $x_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して,

$$\exists M > 0,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ d(x_\lambda, f(x_\lambda)) < M \quad \Longrightarrow \quad z \text{ は } \nu f \text{ の不動点}.$$

*Proof.* $\nu X \subset \mathbb{R}^{C_h(X)}$ であったことを思い起こせば, $z = \nu f(z)$ を示すにはこれらを各射影に落としたものが等しいこと, すなわち $\mathrm{proj}_g(z) = \mathrm{proj}_g(\nu f(z))$ が各 $g \in C_h(X)$ について成り立つことを示せばよい. 仮定より $f(x_\lambda) \in B(x_\lambda, M)$ であること, および $g$ の

---

[2] 距離空間 $(X, d)$ 上の二つの測地線 (すなわち半直線の等長埋め込み) $\gamma_i : [0, \infty) \to X$ $(i = 1, 2)$ が平行であるとは, $\sup\{\, d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid t \in [0, \infty) \,\} < \infty$ が成り立つことと定める.

[3] Gromov 双曲空間における擬等長埋め込みについては [1] を参照のこと.

Higson 条件 $\operatorname{diam} g(B(x_\lambda, M)) \to 0$ より $|g(x_\lambda) - g(f(x_\lambda))| \to 0$ である. 更に $\mathrm{proj}_g$ の連続性に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_g(z) &= \mathrm{proj}_g\left(\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{proj}_g(x_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda} g(x_\lambda)\\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda} g(f(x_\lambda)) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{proj}_g(f(x_\lambda)) = \mathrm{proj}_g\left(\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)\right) = \mathrm{proj}_g(\nu f(z)).\end{aligned}$$

最後の等号において点 $z$ で $hf$ が連続であること (事実 2.11) を用いている. □

**命題 3.4.** $f : X \to X$ を擬等長変換とすれば,

$$\nu f \text{ は不動点を持たない} \implies \lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty.$$

*Proof.* 対偶を示す. そこで結論を否定し, $\sup\{ d(b, f(b) \mid b \in B \} < M$ を満たす非有界集合 $B \subset X$ および正数 $M$ が存在すると仮定しよう. $B$ は非有界であるから $X$ の離散無限閉集合 $\{x_n\} \subset B$ が取れる. すると $hX$ のコンパクト性より点列 $x_n$ は $hX$ において収束する部分有向点列 $x_\lambda = x_{n_\lambda}$ を持つ. その極限を $z$ とすれば, $\{x_\lambda\}$ は $X$ の離散閉集合であったから $z \in \nu X$ でなければならない. このとき, 補題3.3 より $z$ は $\nu f$ の不動点となる. □

**命題 3.5.** 測地空間 $X$ が Gromov 双曲空間であるとする. このとき, 任意の等長変換 $f : X \to X$ について, 条件※は成立する.

*Proof.* ($\Longleftarrow$) を示せばよい. Gromov の意味での理想境界 $\partial_\infty X$ への $f$ の拡張 $\partial_\infty f : \partial_\infty X \to \partial_\infty X$ が不動点を持たないことが仮定より分かる. Higson コンパクト化 $hX$ は Gromov コンパクト化 $X \cup \partial_\infty X$ よりも大きいコンパクト化であるから (cf. [7]), 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \nu X & \xrightarrow{\nu f} & \nu X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \partial_\infty X & \xrightarrow{\partial_\infty f} & \partial_\infty X \end{array}$$

これは $\nu f$ も不動点を持たないことを意味する. □

本節の最後に, 山下氏の稿で述べられた定理を再掲する. 距離空間 $X$ が **large scale doubling** であるとは, 次を満たす $M > 0$ および $N \in \mathbb{N}$ が存在することを言う:

$X$ 上の任意の半径 $R$ 球 (ただし $R > M$) は, $N$ 個の半径 $R/2$ 球で被覆できる.

**例 3.6.** $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{Z}^n$ は large scale doubling である.

**定理 3.7.** 固有距離空間 $X$ を large scale doubling とすれば, $X$ 上の任意の擬等長変換[4] $f : X \to X$ について, 条件※は成立する.

[4]山下氏は $f : X \to X$ が擬等長同型の場合についてのみ論じたが, 擬等長埋め込みについても同じ戦略が適用する.

## 4. 境界の不動点集合

写像 $f : X \to X$ の不動点全体の集合を $\mathrm{Fix}(f)$ と書こう. $\mathrm{Fix}(\nu f)$ を $X$ の部分集合の Higson 境界として表す方法を考えたい. すなわち, 次を満たす $F \subset X$ を探してみよう:

$$\mathrm{Fix}(\nu f) = (\mathrm{cl}_{hX} F) \setminus X.$$

もちろん, 不動点の存在性が不明な状況では手が出ないため, 擬等長変換 $f : X \to X$ について条件※が成立していると仮定して話を進めねばならない. 更に技術的な理由により, 条件※よりも強い次の条件☆も課しておく:

条件☆: 任意の閉部分集合 $A \subset X$ について, $f|_A$ は条件※を満たす. すなわち,

$$\nu(f|_A) = \nu f|_{\nu A} : \nu A \to \nu X \text{ は不動点を持たない} \iff \lim_{x\to\infty} d(x, f|_A(x)) = \infty.$$

ここで, 上の同値条件の lim 記号において $x$ の動く範囲は $A$ であると考えている. 固有距離空間 $X$ が large scale doubling であれば, 任意の擬等長変換 $f : X \to X$ に対して条件☆は成立する. また, Gromov 双曲空間についても同様のことが成立すると予想される.

以下では必要に応じて, $A \subset hX$ について $\mathrm{cl}_{hX} A$ を $\overline{A}$ と略記しよう.

**定理 4.1.** 固有距離空間上の擬等長変換 $f : X \to X$ が条件☆を満たすとする. このとき,

$$\mathrm{Fix}(\nu f) = \mathrm{cl}_{hX}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\, x \in X \mid d(x, f(x)) \leq n \,\}} \setminus X\right).$$

記号を整理して $F_n = \{\, x \in X \mid d(x, f(x)) \leq n \,\}$ とおこう. $F_0 = \mathrm{Fix}(f)$ および $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ である.

*Proof.* ($\supset$): 補題 3.3 より $\overline{F_n} \setminus X$ の各元は $\nu f$ の不動点である. ゆえに, それらの和集合, およびその触点も不動点である.

($\subset$): $\overline{H} := \mathrm{cl}_{hX}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n} \setminus X\right)$ の外側の点は不動点でないことを示せばよい. そこで, $\omega \in \nu X \setminus \overline{H}$ を任意に取る. $hX \setminus \overline{H}$ は $\omega$ の近傍であるから, $\omega \in \overline{V} \subset hX \setminus \overline{H}$ を満たす $hX$ の開集合 $V$ が存在する. $g := f|_{\overline{V}\cap X} : \overline{V} \cap X \to X$ とおこう. $\nu g = \nu f|_{\overline{V}\cap\nu X}$ が不動点を持たないことを示せば十分である. そのためには条件☆より, 任意の非有界集合 $B \subset \overline{V} \cap X$ について $\sup\{\, d(b, f(b) \mid b \in B \,\} = \infty$ を示せばよい. $B$ は非有界であるから $X$ の無限離散閉集合 $B_0 = \{\, b_n \,\} \subset B$ が存在する. また, $\overline{V}$ のコンパクト性より点列 $b_n$ は収束する部分有向点列 $b_\lambda = b_{n_\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$ を持つ. この極限を $b$ とすれば, $B_0$ は $X$ の離散閉集合ゆえ $b \in \nu X \cap \overline{V}$ でなければならない. $\overline{V} \cap \overline{H} = \emptyset$ ゆえ $\overline{V} \cap \overline{F_n} \setminus X = \emptyset$ であり, これは各 $n \in \mathbb{N}$ について $d(b_\lambda, f(b_\lambda)) > n$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ の存在を意味する. 何故なら仮にある $n_0 \in \mathbb{N}$ について, $d(b_\lambda, f(b_\lambda)) \leq n_0$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ について成り立つとすると, $b_\lambda \in F_{n_0}$ ゆえ $b \in \overline{V} \cap \overline{F_{n_0}} \setminus X$ となり矛盾する. 以上より, $\sup\{\, d(b, f(b) \mid b \in B \,\} = \infty$ が示された. □

$H_n := \overline{F_n} \setminus X$ とすれば $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots$ である. $\mathbb{R}^n$ の相似変換を含む多くの擬等長変換では, 十分大きい $N$ 以降で $H_N = H_{N+1} = H_{N+2} = \cdots = \mathrm{Fix}(\nu f)$ となっている. すなわち, $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F_N} \setminus X$ と書けることが分かる.

**例 4.2.** $\mathbb{R}^2$ の相似変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について.

(1) $f$ をスカラー倍をほどこす変換 $f(x) = rx$ $(r \neq 0)$ とすれば, $F_n$ は常に有界集合となるため $H_n = \emptyset$ である. ゆえに $\mathrm{Fix}(\nu f) = \emptyset$.

(2) $f$ を原点中心の $\theta$ 回転とすれば, $F_n$ は常に有界集合となるため $H_n = \emptyset$ である. ゆえに $\mathrm{Fix}(\nu f) = \emptyset$.

(3) $f$ を平行移動 $f(x) = x + y$ とすれば, $n \geq \|y\|$ となるとき $F_n = X$ となる. ゆえに $\mathrm{Fix}(\nu f) = \nu X$.

(4) $f$ を鏡映変換とすれば, 埋め込み $F_0 \hookrightarrow F_n$ は擬等長同型であり, ゆえにこれらの Higson 境界は等しい (事実 2.14). したがって $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{\mathrm{Fix}(f)} \setminus X$.

上のような状況が $\mathbb{R}^n$ の任意の擬等長変換についても言えるかどうか, まだ調べていない:

**問題 4.3.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の擬等長変換 $f$ について, $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F_N} \setminus X$ なる $N \in \mathbb{N}$ は存在するか? また, 存在しない場合でも, $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F} \setminus X$ なる $F \subset X$ は存在するか?

次の命題は, より一般的な立場から例 4.2 (4) について論じたものである. CAT(0) 空間などを想定していると思えばよい.

**命題 4.4.** $X$ を測地空間とし, $X$ 上の任意の 2 点を結ぶ測地線が唯一つしかないとする. $f \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす等長変換 $f$ が条件☆を満たすならば $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{\mathrm{Fix}(f)} \setminus X$.

*Proof.* 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{F_n} \setminus X = \overline{\mathrm{Fix}(f)} \setminus X$ となることを示す. そのためには $F_n \subset B(\mathrm{Fix}(f), n)$ を示せばよい. 何故なら, これにより埋め込み $\mathrm{Fix}(f) \hookrightarrow F_n$ が擬等長同型となり, 事実 2.14 より $\mathrm{Fix}(f)$ および $F_n$ の Higson 境界は一致し, 求める主張を得る.

さて, 任意に $x \in F_n$ を取ろう. $x$ と $f(x)$ を結ぶ測地線を $\gamma$ とすれば, 2 点を結ぶ測地線は唯一つであるから $f(\gamma) = \gamma$ である. ゆえに閉区間 $\gamma$ の不動点定理 (中間値の定理) より $f(z) = z$ を満たす $z \in \gamma$ が存在する. $x \in F_n$ より $d(x, f(x)) \leq n$ であり, $z$ はこれらを結ぶ測地線上の点ゆえ $d(x, z) < n$ となる. $z \in \mathrm{Fix}(f)$ であったことから $x \in B(\mathrm{Fix}(f), n)$ を得る. 以上より $F_n \subset B(\mathrm{Fix}(f), n)$ である. □

ちなみに, 一般的な設定のもとでは $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F} \setminus X$ と表せないこともある:

**命題 4.5.** 擬等長変換 $f$ が条件☆を満たすとする. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_n} \setminus X$ が $\nu X$ の閉集合でないとき, $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F} \setminus X$ なる $F \subset X$ は存在しない.

*Proof.* 仮に $\mathrm{Fix}(\nu f) = \overline{F} \setminus X$ と書けるとしよう. $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_n} \setminus X$ とおき, $z \in \overline{H} \setminus H$ を取る. $z$ に収束する $F$ 上の有向点列 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を取れば, $z$ の取り方から, すべての $x_\lambda$

を含む $F_n$ は存在しない．したがって，各 $n \in \mathbb{N}$ ごとに $x_{\lambda_n} \notin F_n$ を満たす $\lambda_n \in \Lambda$ が取れる．このとき $d(x_{\lambda_n}, f(x_{\lambda_n})) > n$ である．そこで $B = \{x_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおけば，これは非有界集合となる．よって $\omega \in \overline{B} \cap \nu X = \nu B$ が取れる．$B \subset F$ ゆえ $\omega$ は $\nu f$ の不動点であるが，条件☆によれば $\nu f|_{\nu B}$ は不動点を持たない．これは矛盾である． □

## 5. 関連事項

本稿では $\nu f$ が位相的埋め込みになる場合のみを扱った．一方，距離空間の間の粗写像 (coarse map) は Higson 境界上の連続写像を誘導し，この枠組みにおいても本稿で論じたことと同様の問題が考えられる．また，更に一般化された粗空間についてもそうである．粗空間に関する諸々の定義については [8] を参照されたい．

粗構造 (coarse structure) の言葉で条件※や☆を一般化すると次のようになる．粗空間 $(X, \mathcal{E})$ 上の粗写像 $f : X \to X$ に対して，"$\lim_{x \to \infty} d(x, f(x)) = \infty$" を次の同値な二つの条件のいずれかで定義する:

(1) $\forall E \in \mathcal{E}$, $\exists K \subset X$ : 有界集合 s.t. $x \in X \setminus K \implies (x, f(x)) \notin E$,

(2) $\forall B \subset X$ : 非有界集合に対して， $\{(b, f(b)) \mid b \in B\} \notin \mathcal{E}$.

このとき，次は容易に示せる．

**命題 5.1.** $X$ を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする．第 1 可算公理を満たすコンパクト化から定まる位相的粗構造について，粗写像 $f : X \to X$ は条件☆を満たす．

## References


[1] S. Buyalo, V. Schroeder, Elements of asymptotic geometry, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.

[2] E. K. van Douwen, *$\beta X$ and fixed-point free maps*, Topol. Appl. **51** (1993), 191–195.

[3] A.N. Dranishnikov, J. Keesling, and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology **37** (1998), no. 4, 791–803.

[4] J. van Mill, *The Infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Mathematical Library 64, Amsterdam, 2001.

[5] 嶺 幸太郎, Higson 関数の拡張性, 一般および幾何学的トポロジーとその応用, 数理解析研究所講究録 **1781** (2012), 29–37.

[6] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures*, `arXiv:1106.1672v3`.

[7] J. Roe, *Hyperbolic metric spaces and the exotic cohomology Novikov conjecture*, $K$-Theory **4** (1990/91), no. 6, 501–512.

[8] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.